

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x - 1) - x \ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0; +\infty[$:
 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e; +\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0; +\infty[$.

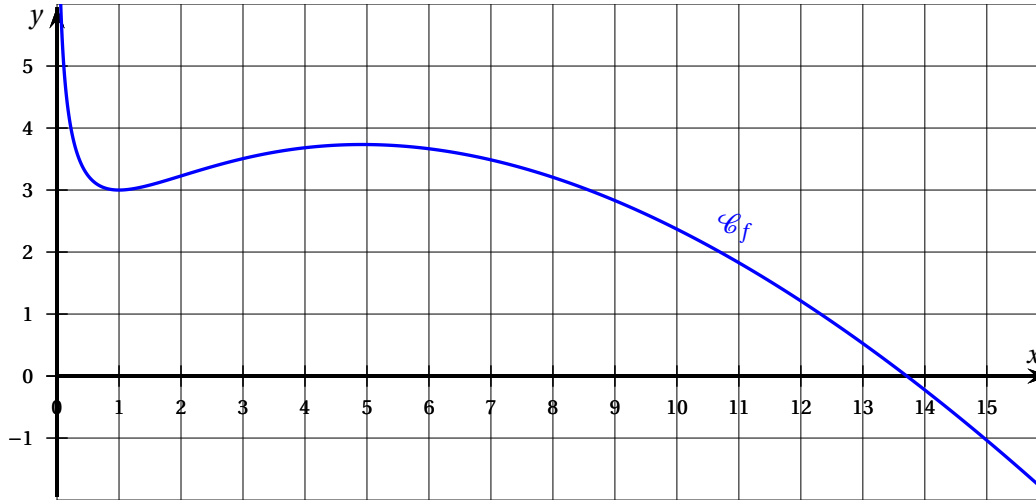
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f .

La représentation graphique \mathcal{C}_f de cette fonction f est donnée dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous. On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2.
 - a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
 - b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$.
Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de \mathcal{C}_f .